

IHRF Antioquia y QgeoidMEDE2025

Dr. Carlos Alirio Rico Acevedo
Ing. Harold Steven Olarte
Instituto Geográfico Agustín Codazzi

Geodesia Moderna
y Sistemas Globales de Referencia
21 al 24 de abril 2026

1



ÓRDEN DEL DÍA



- ▶ Objetivos.
- ▶ Introducción.
- ▶ Metodología.
- ▶ Configuración del modelo QgeoidMEDE2025.
- ▶ Insumos gravimétricos y GNSS/Nivelación.
- ▶ Resultados modelado.
- ▶ Modelo QgeoidMEDE2025.
- ▶ Cálculo $C_{(MEDE)}^{IHRF}$ y diferencia de potencial a vértice auxiliar.

2



OBJETIVOS



► **Objetivo General:**

Determinar el número geopotencial IHRF en la estación de monitoreo permanente MEDE, realizando el modelado mediante funciones de base radial esféricas del campo de gravedad regional y comparar con las soluciones calculadas por los modelos QgeoidCOL2023 Liu et al. (2024) y SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).

► Objetivos específicos:

1. Diseñar los algoritmos y rutinas necesarias para reproducir la solución al problema de valor en la frontera escalar fijo, mediante el uso de las Funciones de Base Radial Esféricas (FBRE) Freedon et al. (1998) y un modelo extendido combinado de Gauss-Márkov Liu (2023).
2. Desarrollar un modelo cuasigeoidal con zona de cálculo centrada en la estación de monitoreo permanente MEDE validando su consistencia con datos de GNSS/Nivelación.
3. Analizar el cambio de las anomalías de altura con respecto al cuasigeoide colombiano 2023 Liu et al. (2024) y el SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).
4. Evaluar las diferencias del número geopotencial (C_p^{IHRF}) en la estación MEDE, entre el cuasigeoide calculado en el presente proyecto, el cuasigeoide 2023 Liu et al. (2024) y el SAM (cuasigeoide para las Américas del sur) de Matos et al. (2021).

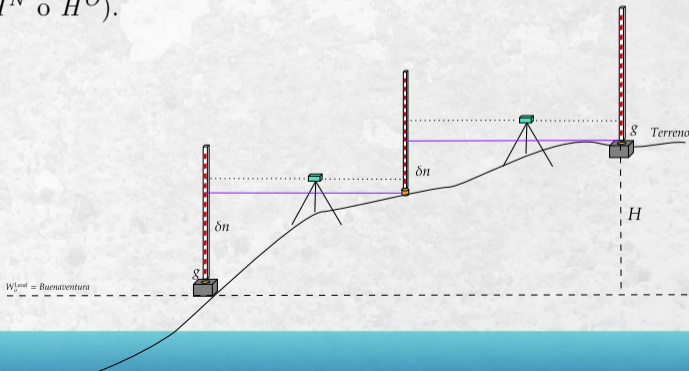
3

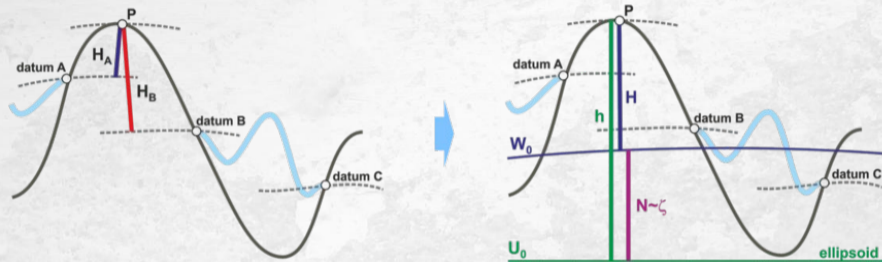


INTRODUCCIÓN



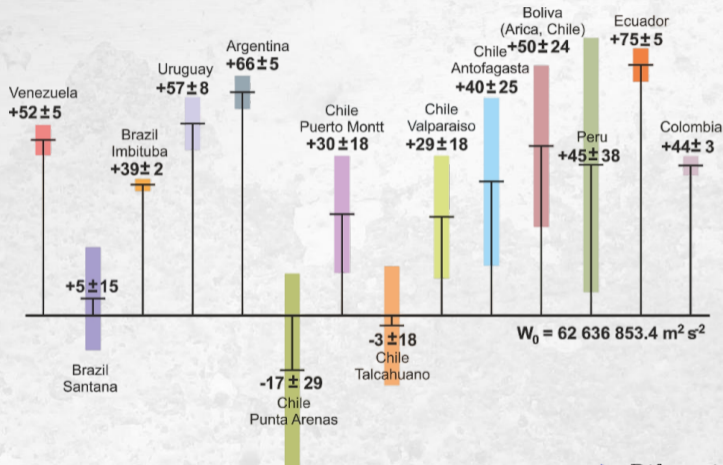
- ▶ **Sistema oficial de alturas en Colombia:**
 - ▶ **Alturas niveladas (H)**, las cuales se propagan mediante nivelación geodésica, nivelación de precisión o también llamada nivelación geométrica.
 - ▶ W_o^{Local} : **Datum Vertical del Mareógrafo de Buenaventura.**
 - ▶ se pueden transformar en desniveles Físicos y finalmente en alturas Físicas (H^N o H^O).





Tomado de Taller SIRGAS 2022 Dra. L.Sánchez.

- ▶ Definición de un sistema de referencia de alturas único basado en la Teoría del Potencial de Gravedad.
- ▶ Fortalecer conversión de alturas GNSS a alturas Físicas.
- ▶ Se tenga variaciones temporales.
- ▶ Se necesita el **modelado del campo de gravedad local** (modelado cuasigeoide o geoide).



Tomado de Taller SIRGAS 2022 Dra. L.Sánchez.

- ▶ Diferencias de Datums Locales y el valor de W_0^{IHRF} .
- ▶ a razón de “niveles medios” del mar.

4

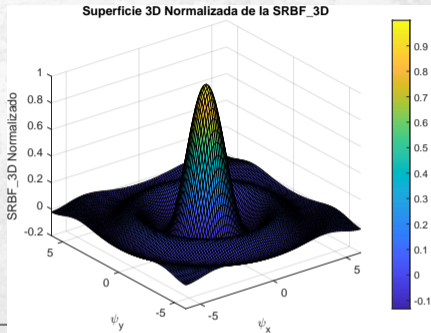


METODOLOGÍA



- ▶ El kernel de las FBRE salen de la integral de Poisson de continuación analítica del potencial de gravedad.

$$B(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\cos \psi). \quad (1)$$



Funciones Gravitacionales

Adaptación de las FBRE $B(x, x_k)$

Diferencia de Potencial (ΔW)

$$B(x^A, x^B, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left[\left(\frac{R}{r^A}\right)^{n+1} P_n(\mathbf{r}^A \cdot \mathbf{r}_k) - \left(\frac{R}{r^B}\right)^{n+1} P_n(\mathbf{r}^B \cdot \mathbf{r}_k) \right]$$

Perturbación de Gravedad (δg)

$$B_r(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+1)}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_k)$$

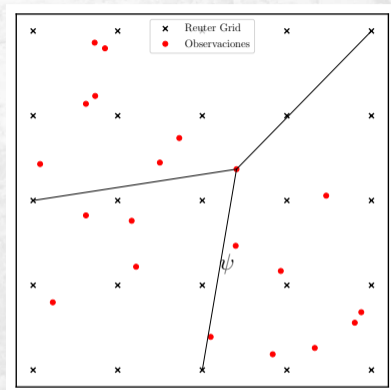
Gradiente de Gravedad ($\frac{\partial g}{\partial n}$)

$$B_{rr}(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_k)$$

- Una observación de gravedad $\Delta\delta_g$ se puede escribir mediante una sumatoria de FBRE:

$$\Delta\delta_g(x) + e(x) = \sum_{k=1}^K d_k B(x, x_k). \quad (2)$$

- El problema se puede vectorizar y además combinar diferentes conjuntos de datos gravimétricos (según su técnica o levantamiento):



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \\ \mu_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_L \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \\ I \end{bmatrix} \cdot d, \quad \text{con } D \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \\ \mu_d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 P_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 P_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_L^2 P_L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_d^2 P_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

- ▶ La estimación del vector d se puede realizar de la siguiente manera Koch and Kusche (2002):

$$\hat{d} = \left(\sum_{l=1}^L \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_l^2} A_l' P_l A_l \right) + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_d^2} P_d \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_l^2} A_l' P_l f_l \right) + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_d^2} P_d \mu_d, \quad (4)$$

$$D(\hat{d}) = \left(\sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{\sigma_l^2} \right) + \frac{1}{\sigma_d^2} P_d \right)^{-1}, \quad (5)$$

si $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_l^2} = \omega_l$, y $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_d^2} = \lambda$. Los pesos relativos ω_l se estiman mediante el proceso iterativo **VCE** por sus siglas en inglés y el parámetro de regularización de Tikhonov λ se estima mediante la **L-curva**.

- ▶ Para el caso de QgeoidMEDE2025 se aplica el proceso VCE-Lc.



- ▶ **VCE** por sus siglas en inglés se refiere a la estimación de los componentes de varianza, es un proceso iterativo de aplicación de las siguientes ecuaciones Liu et al. (2020a):

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_M \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_M \\ I_p \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \\ \varepsilon_\mu \end{bmatrix} \quad \text{Var} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_M \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 P_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 P_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_\mu^2 P_\mu^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_M^2 = \sigma_\mu^2 = 1 \rightarrow \lambda = 1$$

$$\sigma_1^2 = \hat{\sigma}_1^2, \dots, \sigma_M^2 = \hat{\sigma}_M^2, \sigma_\mu^2 = \hat{\sigma}_\mu^2$$

$$(X_1' P_1 X_1 + \omega_2 X_2' P_2 X_2 \dots + \lambda P_\mu) \hat{\beta} = X_1' P_1 Y_1 + \dots + \omega_M P_M Y_M + \lambda P_\mu \mu \quad \text{No}$$

$$\hat{\beta}$$

$$\sigma_1^2 - \hat{\sigma}_1^2 < cte$$

Si

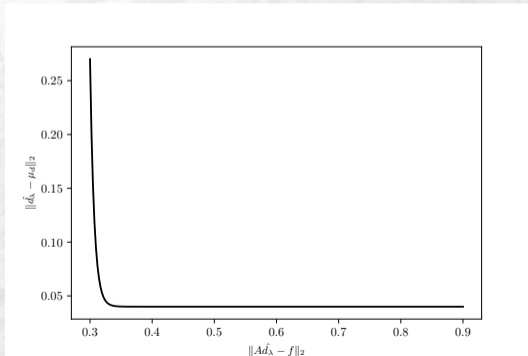
$$\sigma_1^2 = \hat{\sigma}_1^2, \dots, \sigma_M^2 = \hat{\sigma}_M^2, \sigma_\mu^2 = \hat{\sigma}_\mu^2$$

$$\begin{aligned} \triangleright \hat{\varepsilon}_i &= X_i \hat{\beta} - Y_i \cdot x & \triangleright r_i &= N_i - \text{Tr} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} X_i' P_i X_i Q^{-1} \right). \\ \triangleright \hat{\varepsilon}_\mu &= \hat{\beta} - \mu & \triangleright r_\mu &= p - \text{Tr} \left(\frac{1}{\sigma_\mu^2} P_\mu Q^{-1} \right). \\ \triangleright Q &= \frac{1}{\sigma_1^2} X_1' P_1 X_1 + \dots + \frac{1}{\sigma_M^2} X_M' P_M X_M + \frac{1}{\sigma_\mu^2} P_\mu. \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\varepsilon}_i' P_i \hat{\varepsilon}_i}{r_i} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{\hat{\varepsilon}_\mu' P_\mu \hat{\varepsilon}_\mu}{r_\mu}$$

- **L-curva** es un proceso de elección del mejor parámetro de regularización de Tikhonov λ . En donde se minimice la 2-norma de los errores y la 2-norma de la regularización como se muestra en la siguiente imagen:

$$\begin{cases} \|\hat{e}_l\|_2 = \|A_l \hat{d}_\lambda - f_l\|_2, \\ \|\hat{e}_d\|_2 = \|\hat{d}_\lambda - \mu_d\|_2. \end{cases}$$

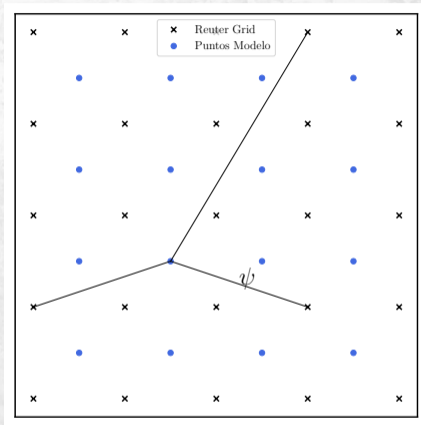


- ▶ El potencial de perturbación T se puede describir mediante el modelo de Gauss-Márkov y los parámetros \hat{d} estimados.

$$\hat{T} = B\hat{d}, \quad (7)$$

$$D\hat{T} = BD(\hat{d})B'. \quad (8)$$

- ▶ Luego las anomalías de altura se calculan por un proceso iterativo de aplicación del teorema de Bruns.



$$\zeta_{i+1} = \frac{\hat{T}}{\gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f \sin^2(\varphi))(h - \zeta_i) + \frac{3}{a^2}(h - \zeta_i)^2 \right]}. \quad (9)$$

► **Remover:**

$$\Delta\delta_g = \delta_g - \delta_g^{GGM} - \delta_g^{Gtopo1} - \delta_g^{Gtopo2}. \quad (10)$$

1. Longitud de Onda larga:

XGM2019 d/o 719 (δ_g^{GGM}) → Datos Terrestres y aéreos.

2. Longitud de Onda media-corta:

dv_ell_Earth2014 d/o 720-2159 (δ_g^{Gtopo1}) → Datos Terrestres;
d/o 720-5480 (δ_g^{Gtopo1}) → Datos Aéreos y Altimetría Satelital.

3. Longitud de onda muy corta:

ERTM2160 (δ_g^{Gtopo2}) → Datos Terrestres.



► **Restaurar:**

$$\zeta = \zeta^{res} + \zeta^{GGM} + \zeta^{Gtopo1} + \zeta^{Gtopo2}. \quad (11)$$

1. Longitud de Onda larga:

XGM2019 d/o 719 (ζ^{GGM}).

2. Longitud de Onda media-corta:

dv_ell_Earth2014 d/o 720-2159 (ζ^{Gtopo1}).

3. Longitud de onda muy corta:

ERTM2160 (ζ^{Gtopo2}).

5



CONFIGURACIÓN DEL MODELO QGEOIDMEDE2025



► **Ubicación de las FBRE** → Reuter Grid Reuter (1982).

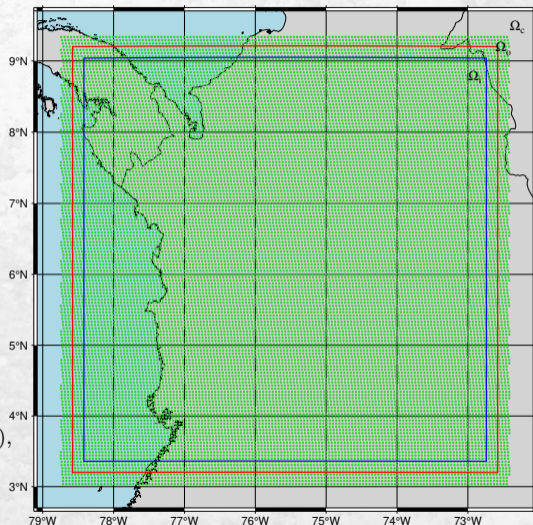
► **Forma o filtro de las FBRE** (B_n):

1. **Shannon:** DTU21Gra^A, Terrestres^A.
2. **CuP:** DTU21Gra^S, Terrestres^S y Aéreos^{A,S}.

► **Frecuencias del modelo** N_{max}
→ desde 2000 hasta 5700.

► **Efecto de borde** → $\eta_0 = 0.1^\circ$.

1. $\Omega_i : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 2.84^\circ, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 2.84^\circ)$,
2. $\Omega_o : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 3^\circ, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 3^\circ)$,
3. $\Omega_c : (\varphi_{min}^{max} = \varphi_{MEDE} \pm 3.1^\circ, \lambda_{min}^{max} = \lambda_{MEDE} \pm 3.1^\circ)$.



6

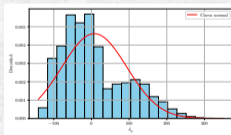
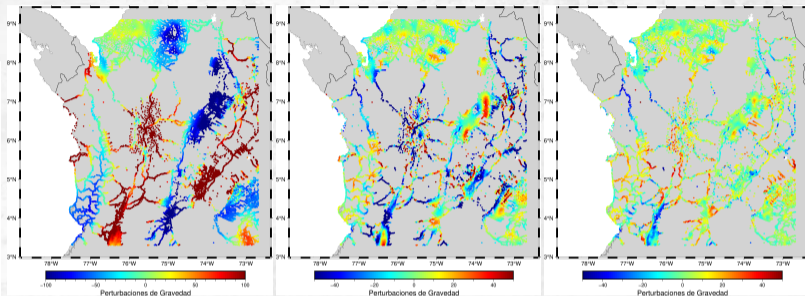


INSUMOS GRAVIMÉTRICOS Y GNSS/NIVELACIÓN

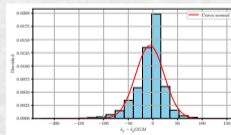


► **Datos Terrestres.**

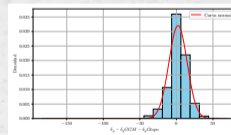
Tratamiento Horizontal	Cantidad
Total de observaciones iniciales	44,273
Observaciones eliminadas por posición exacta	3,907
Observaciones eliminadas por filtro de distancia	2,697
Observaciones eliminadas por valores incoherentes	12
Observaciones con altura ≥ 2000 m	4,218
Observaciones con altura ≤ 2000 m	33,439
Eliminados del primer grupo (altura ≥ 2000 m)	14
Eliminados del segundo grupo (altura ≤ 2000 m)	569
Eliminados totales	583
Observaciones finales tras depuración	37,074
Outliers eliminados por validación cruzada (IDW)	633
Total de datos óptimos para el modelamiento	36,441



$$\delta g$$



$$\delta g - \delta g^{GGM}$$



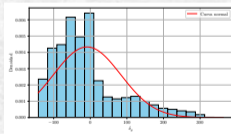
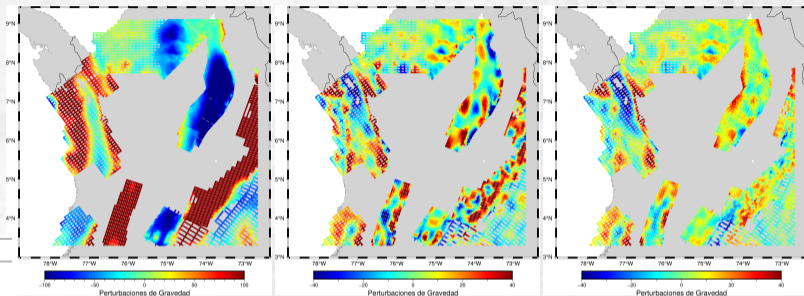
$$\Delta \delta g$$

Estadístico	δg	$\delta g - \delta g^{GGM}$	$\Delta \delta g$
Media	7.6078	-6.1704	2.2409
Mediana	-10.5694	-1.4313	2.4064
Std	86.3369	28.7371	12.4476
Máximo	349.5970	145.6825	69.3697
Mínimo	-140.9282	-225.0014	-183.4537

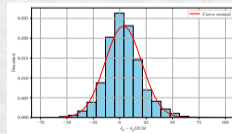
► **Datos Aéreos.**

Tratamiento Aerogravimétricos	Cantidad
Total de observaciones iniciales	4310766
Total de Observaciones baja Frecuencias	82258
Outliers eliminados por validación Cruzada (IDW)	391
Total de datos óptimos para el modelamiento	81,867

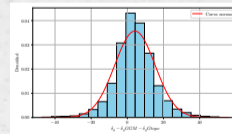
Estadístico	δg	$\delta g - \delta g_{GGM}$	$\Delta \delta g$
Media	-8.5111	3.4244	3.6542
Mediana	-28.4467	2.5471	3.4638
Std	92.2724	17.3271	11.0951
Máximo	362.9876	100.1678	54.2340
Mínimo	-141.7863	-74.7079	-46.7675



δg



$\delta g - \delta g_{GGM}$

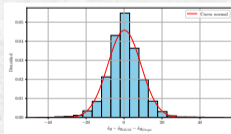
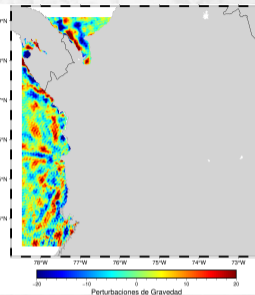
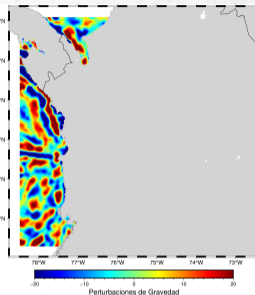
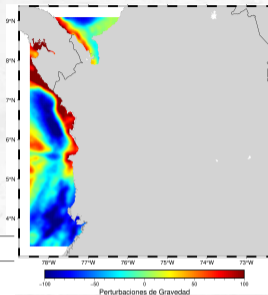


$\Delta \delta g$

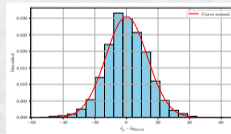


► **Datos DTU21Gra.**

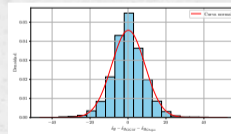
Estadístico	Δg	$\Delta g - \Delta g_{GGM}$	Δg_{res}
Media	-17.6845	0.0829	0.1637
Mediana	-27.2580	-0.3344	-0.0040
Std	56.1091	13.0951	8.7215
Máximo	178.3950	62.1441	52.1631
Mínimo	-117.9630	-54.7924	-46.3219



$$\Delta g$$

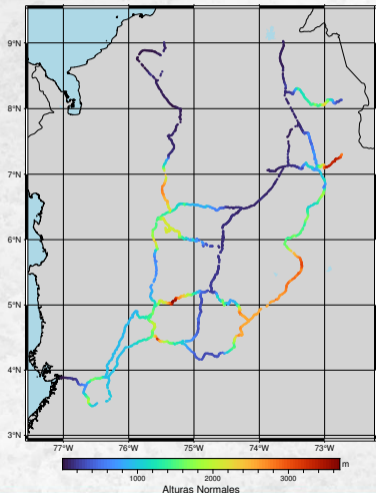


$$\Delta g - \Delta g_{GGM}$$



$$\Delta g_{res}$$

► **GNSS/Nivelación.**



(a)

- **a.** Validación Absoluta (3316 datos).

$$\Delta\zeta_i = \zeta_i^{GNSS/Nivelacin} - \zeta_i^{QgeoidMEDE2025}, \quad (12)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$.

- **b.** Validación relativa.

$$\Delta\zeta_{ij} = (\zeta_i^{geom} - \zeta_j^{geom}) - (\zeta_i^{grav} - \zeta_j^{grav}). \quad (13)$$

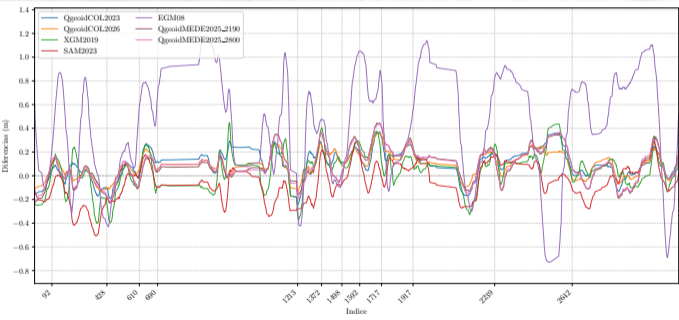
7



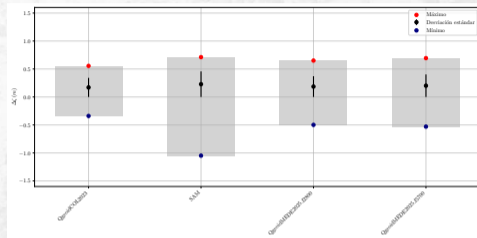
RESULTADO MODELADO



- ▶ **Validación Absoluta:** Se evalúan un total de 3 modelos a diferentes frecuencias. → comparan con los datos de GNSS/Nivelación.
- ▶ Para la escogencia del mejor valor de N_{max} .



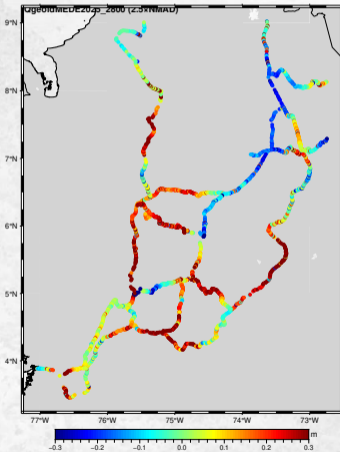
Perfil de validación absoluta



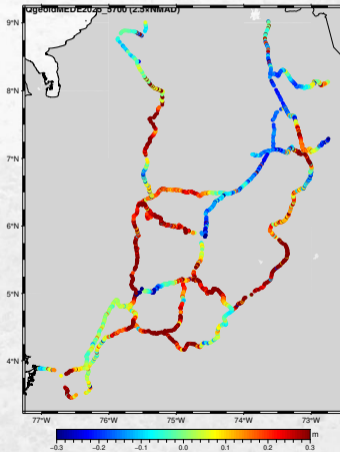
ploteo estadísticos básicos.

Estadísticos	QgeoidMEDE2025 f5700 (m)	QgeoidMEDE2025 f2800 (m)
Máximo	0.694479	0.650435
Mínimo	-0.530174	-0.498735
Media	0.113569	0.090927
Desviación Estándar	0.201291	0.185589

- **Validación Absoluta:** para los dos modelos con mejores estadísticos básicos.



$N_{max} = 2800.$

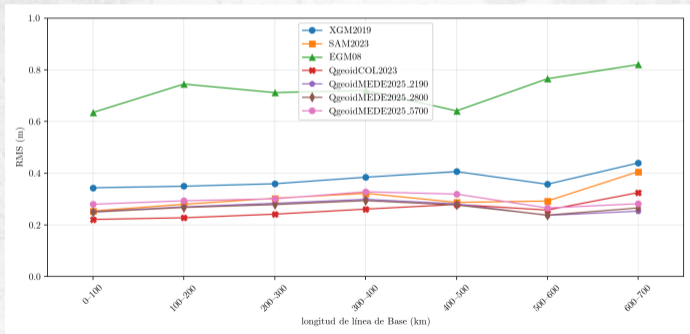


$N_{max} = 5700.$

- **Validación Relativa:** Se evalúan los dos mejores modelos de la validación absoluta.

1. $N_{max} = 2800$
2. $N_{max} = 5700$

- Se evidencia el **refinamiento del modelo XGM2019.**



Perfil de validación absoluta

- Se evidencia estabilidad para líneas de Nivelación largas dentro del área de cubrimiento del modelo QgeoidMEDE2025.

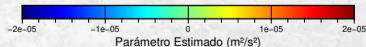
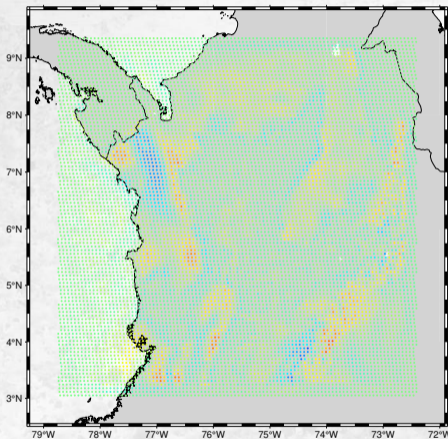
8



MODELO QGEOIDMEDE2025

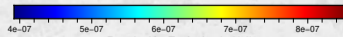
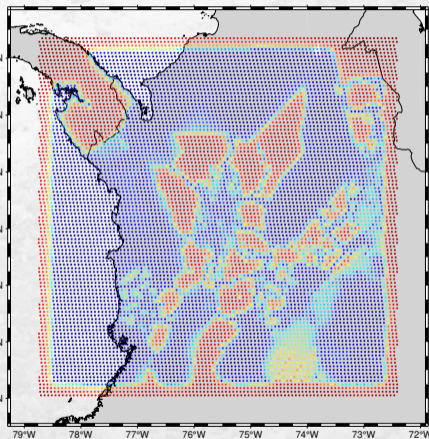


► Estimación de Parámetros:



Parámetro Estimado (m^2/s^2)

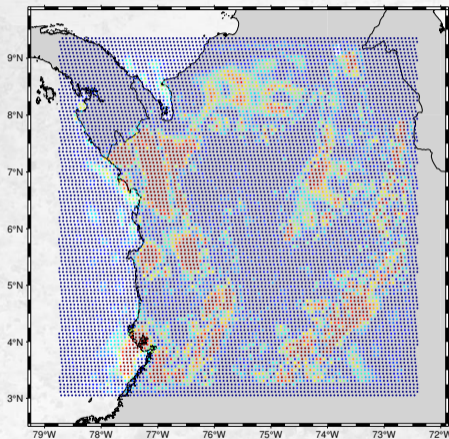
\hat{d}_k



Desviación Estándar (m^2/s^2)

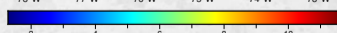
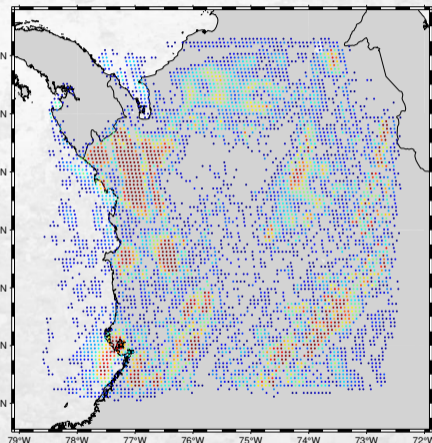
$\hat{\sigma}_{d_k}$

► Significancia de Parámetros:



Estadístico t

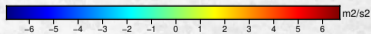
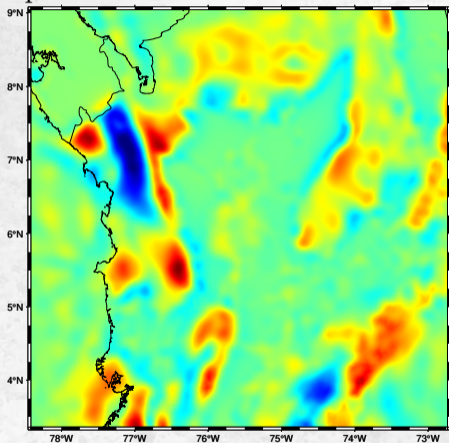
t_{stat}



Estadístico t

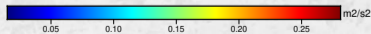
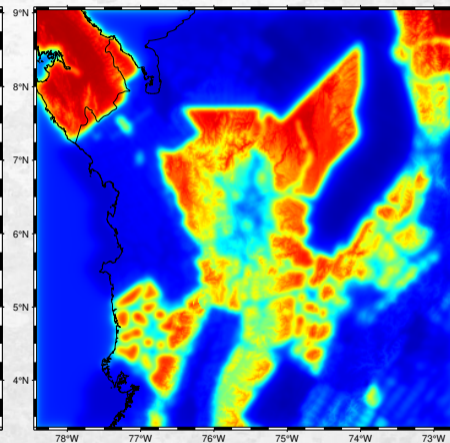
$t_{stat} > t_{tab}$

► Potencial perturbador:



Potencial Perturbador

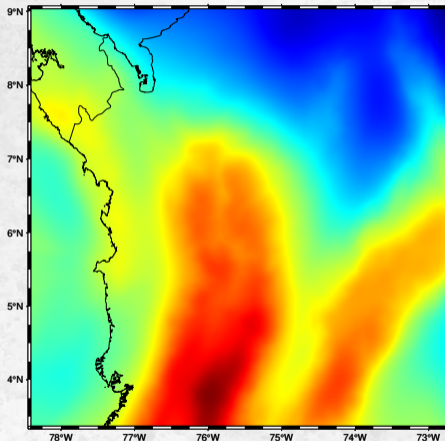
$$\hat{T}$$



Desviación Estándar

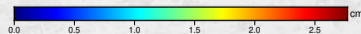
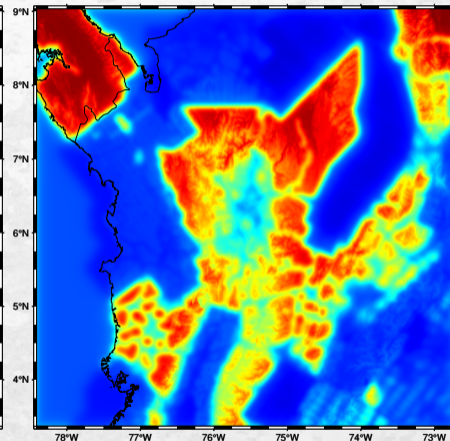
$$\sigma_{\hat{T}}$$

► Anomalías de altura:



Anomalía de Altura

$$\hat{\zeta}$$



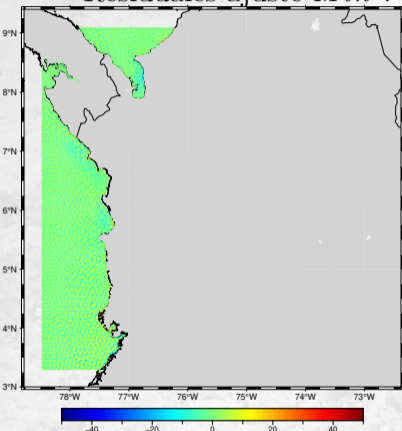
Desviación Estándar

$$\hat{\sigma}_{\zeta}$$

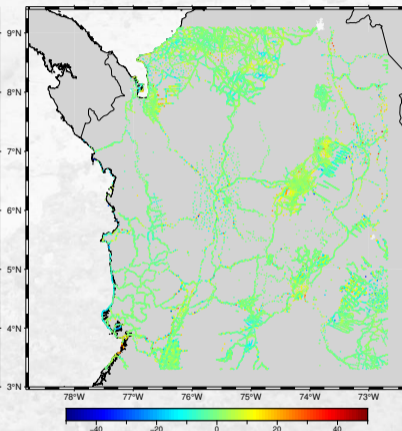
► Características del modelo:

Tipo	Qgeoide Gravimétrico Puro
Método	SRBF + GMM + VCE + LC
Resolución Espacial	1' × 1'
Grado de expansión	2800
Modelos de fondo	GGM: XGM2019 d/o 0-719 Gtopo1: dv_ell_Earth2014 d/o 720-2159 Gtopo2: ERTM2160 d/o 2160-80000
Concepto de Sistema de Mareas Permanente	Zero Tide
Término de Orden Cero	Primer y Segundo término
$(\hat{\sigma}_{\max}, \hat{\sigma}_{\min})$	$(\pm 0.2527 \text{ cm}, \pm 2.771 \text{ cm})$

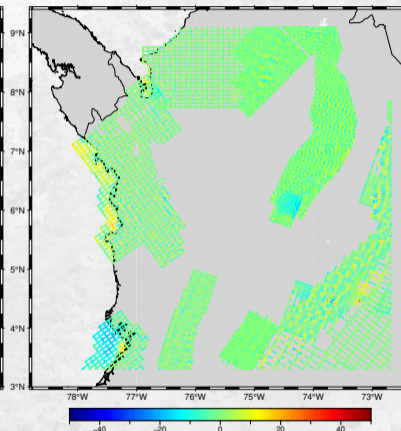
► Residuales ajuste Min^2 :



DTU21Gra ($\sigma = 2.76\text{mGal}$)



Terrestres ($\sigma = 5.27\text{mGal}$)



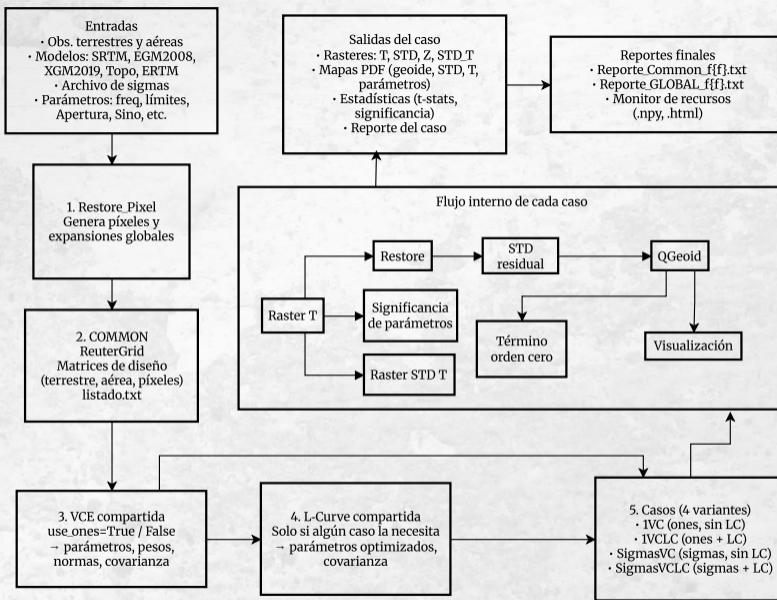
Aéreos ($\sigma = 3.8\text{mGal}$)

9



ESQUEMA DEL CODIGO IMPLEMEN- TADO





10

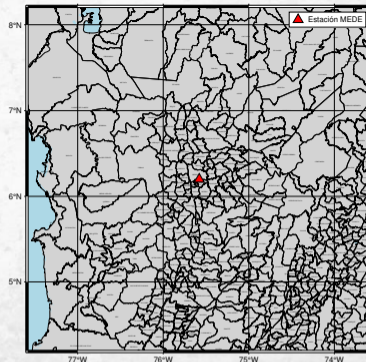


CÁLCULO $C_{(MEDE)}^{IHRF}$ Y DIFERENCIA DE POTENCIAL A VÉRTICE AUXILIAR

.....

- ▶ Cálculo del número geopotencial IHRF para la estación MEDE.

$$(\varphi, \lambda, h) = 6.1994065757^\circ, -75.5789160501^\circ, 1553.464\text{m}$$



	QgeoidMEDE2025	QgeoidCOL2023	SAM
$\hat{\zeta}$	24.41098 m	24.55260 m	23.84758 m
$W_p(\text{Provisorio})$	$62621901.451 \frac{m^2}{s^2}$	$62621902.877 \frac{m^2}{s^2}$	$62621903.389 \frac{m^2}{s^2}$
W_p^{ZT}	$62621900.881 \frac{m^2}{s^2}$	$62621902.307 \frac{m^2}{s^2}$	$62621902.819 \frac{m^2}{s^2}$
C_p^{ZT}	$14952.519 \frac{m^2}{s^2}$	$14951.135 \frac{m^2}{s^2}$	$14951.093 \frac{m^2}{s^2}$
C_p^{IHRF}	$14951.58 \frac{m^2}{s^2}$	$14950.2 \frac{m^2}{s^2}$	$14950.15 \frac{m^2}{s^2}$

Diferencia de potencial a vértice auxiliar

- Se realiza la nivelación geométrica y trigonométrica para establecer la diferencia de altura entre MEDE y el vértice 05001008. Además de la medición relativa de gravedad.

$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14951.58 + \int_{H_{MEDE}}^{H_{05001008}} \bar{g} \delta n$$

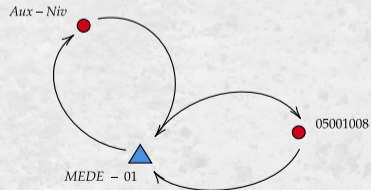
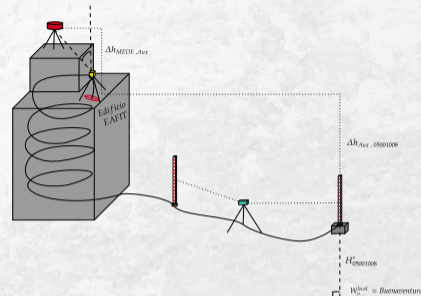
$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14951.58 - 26.1133 \cdot \bar{g}$$

$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14951.58 - 26.1133 \cdot \frac{g_{MEDE} + g_{05001008}}{2}$$

$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14951.58 - 26.1133 \cdot \frac{9.77734688 + 9.77740021}{2}$$

$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14951.58 - 26.1133 \cdot 9.777373545$$

$$C_{(05001008)}^{IHRF} = 14696.263 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$



$$H^N = \frac{C^{IHRF}}{\gamma} \left[1 + \frac{1}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C^{IHRF}}{\gamma} + \left(\frac{C^{IHRF}}{a\gamma} \right)^2 \right],$$

$$H_{05001008}^N = 1502.8992m.$$

$$\sigma_{C_{05001008}^{IHRF}}^2 = \sigma_{C_{MEDE}^{IHRF}}^2 + \left(\frac{\partial C^{IHRF}}{\partial \Delta n} \right)^2 \cdot \sigma_{\Delta n}^2 + \left(\frac{\partial C^{IHRF}}{\partial \bar{g}} \right)^2 \cdot \sigma_{\bar{g}}^2,$$

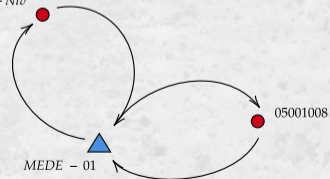
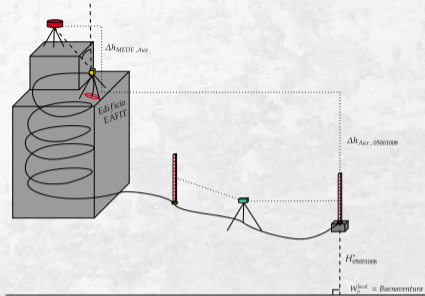
$$\sigma_{C_{0501008}^{IHRF}}^2 = \sigma_{C_{MEDE}^{IHRF}}^2 + (-\bar{g})^2 \cdot \sigma_{\Delta n}^2 + (-\Delta n)^2 \cdot \sigma_{\bar{g}}^2$$

$$\sigma_{C_{0501008}^{IHRF}}^2 = \sigma_{C_{MEDE}^{IHRF}}^2 + (-\bar{g})^2 \cdot \sigma_{\Delta n}^2 + (-\Delta n)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot (\sigma_{g1}^2 + \sigma_{g2}^2) \right)^2_{Aux-Niv}$$

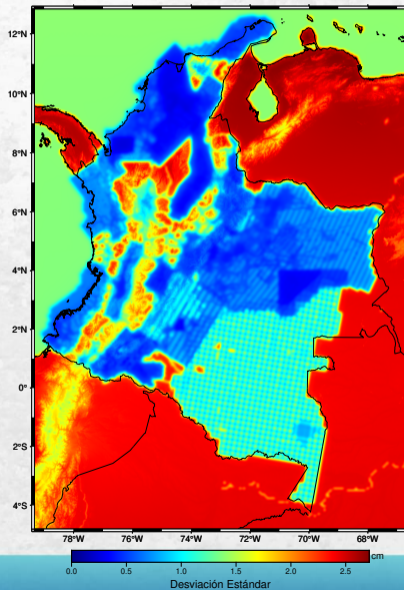
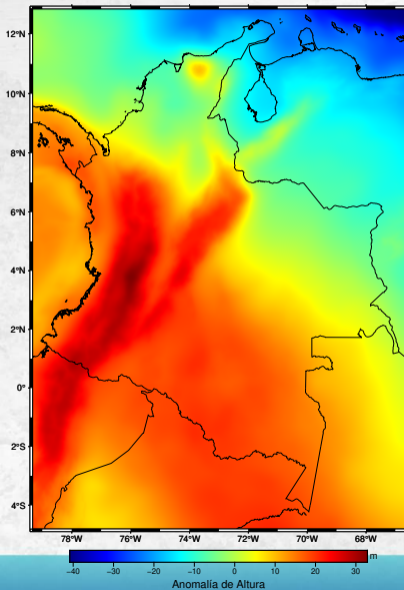
$$\sigma_{C_{0501008}^{IHRF}} = \pm 0.10495 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\sigma_{H_{0501008}^N} = \frac{\sigma_{C_{0501008}^{IHRF}}}{\gamma}$$

$$\sigma_{H_{0501008}^N} = \pm 1.073 \text{ cm}$$



Modelo QgeoidCOL2026, primer cálculo



Bibliografía



Andersen, O. B. and Knudsen, P. (2020).

The dtu17 global marine gravity field: First validation results.

In *Fiducial Reference Measurements for Altimetry: Proceedings of the International Review Workshop on Satellite Altimetry Cal/Val Activities and Applications*, pages 83–87. Springer.



Bentel, K. and Schmidt, M. (2015).

Combining different types of gravity observations in regional gravity modeling in spherical radial basis functions.

In *International Association of Geodesy Symposia*. Springer International Publishing Switzerland, Munich, Germany. Chapter in a book.



Bentel, K., Schmidt, M., and Gerlach, C. (2013).

Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere.

Int J Geomath, 4:67–96.



Bucha, B., Janák, J., Papčo, J., and Bezděk, A. (2016).

High-resolution regional gravity field modelling in a mountainous area from terrestrial gravity data.

Geophysical Journal International, 207(2):949–966.

Accepted: 2016 August 12; Received: 2016 July 1; In original form: 2016 May 2; Advance Access publication: 2016 August 19.



Childers, V. A., Bell, R. E., and Brozena, J. M. (1998).

Airborne gravimetry: an investigation for filtering.

Geophysics, 64:61–69.

Manuscript received by the Editor October 30, 1995; revised manuscript received May 26, 1998.



Cid Palacios, R., Ferrer Martínez, S., and Nacional, I. G. (1999).

Geodesia: geométrica, física y por satélites.
Instituto Geográfico Nacional.



de Matos, A. C. O. C., Blitzkow, D., Guimarães, G. d. N., and Silva, V. C. (2021).

The south american gravimetric quasi-geoid: Qgeoid2021. v. 1.0.
GFZ Data Services.



Denker, H. (2013).

Regional gravity field modeling: Theory and practical results.
In Xu, G., editor, *Sciences of Geodesy - II*. Springer, Berlin, Heidelberg.



Eicker, A. (2008).

Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data.
Inaugural dissertation zur erlangung des akademischen grades doktor ingenieur (dr.ing.), Institut für Geodäsie und Geoinformation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bonn, Germany.



Eicker, A., Schall, J., and Kusche, J. (2014).

Regional gravity modelling from spaceborne data: case studies with goce.
Geophysical Journal International, 196:1431–1440.
Advance Access publication 2013 December 24. Accepted 2013 November 28. Received 2013 October 21; in original form 2013 June 4.



Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W. (2004).

A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems.
Geophysical Journal International, 156(3):411–425.



Featherstone, W. E. (2001).

Absolute and relative testing of gravimetric geoid models using global positioning system and orthometric height data.

Computers & Geosciences, 27:807–814.

Received 9 February 2000; received in revised form 11 August 2000; accepted 12 August 2000.



Fecher, T., Pail, R., Gruber, T., and GOCO Consortium (2017).

Goco05c: A new combined gravity field model based on full normal equations and regionally varying weighting.

Surveys in Geophysics, 38:571–590.

Received 27 May 2016; accepted 5 December 2016; published online 7 January 2017.



Foroughi, I., Afrasteh, Y., Ramouz, S., and Safari, A. (2017).

Local evaluation of earth gravitational models, case study: Iran.

Geodesy and Cartography, 43(1):1–13.

Received 6 January 2017; accepted 13 February 2017.



Forsberg, R. (1993).

Modelling the fine-structure of the geoid: Methods, data requirements and some results.

Surveys in Geophysics, 14(4):403–418.



Freeden, W., Gervens, T., and Schreiner, M. (1998).

Constructive Approximation on the Sphere with Applications to Geomathematics.

Oxford University Press, Oxford.



Guimarães, G. d. N., Tocho, C., Piña, W. H. S., Cancoro de Matos, A. C. O., Gómez, A., Antokoletz, E. D., and Blitzkow, D. (2024).

Guía06 directrices para el cálculo de los valores de potencial de gravedad en las estaciones ihref de la región sirgas. GT III SIRGAS.



Guo, J.-Y. (2023).

Physical Geodesy.

Springer Textbooks in Earth Sciences, Geography and Environment. Springer Cham, 1 edition.



Hansen, P. C. (2000).

The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems.

In Johnston, P., editor, *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, volume 4 of *Advances in Computational Bioengineering*, pages 119–142. WIT Press, Southampton.



Hansen, P. C. and O'Leary, D. P. (1993).

The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems.

SIAM Journal on Scientific Computing, 14(6):1487–1503.



Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967).

Physical Geodesy.

Freeman and Company, San Francisco, USA.



Hirt, C., Featherstone, W. E., and Marti, U. (2010).

Combining egm2008 and srtm/dtm2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data.

Journal of Geodesy, 84(8):557–567.

Received: 21 October 2009; Accepted: 4 June 2010; Published online: 3 July 2010.



Hirt, C., Kuhn, M., Claessens, S. J., Pail, R., Seitz, K., and Gruber, T. (2014).

Study of Earth's short-scale gravity field using the high-resolution SRTM topography model.

Computers & Geosciences, 73:71–80.



Hirt, C. and Rexer, M. (2015).

Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models – available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics.

International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 39:103–112.



Hirt, C., Yang, M., Kuhn, M., Bucha, B., Kurzmann, A., and Pail, R. (2019).

SRTM2gravity: an ultrahigh resolution global model of gravimetric terrain corrections.

Geophysical Research Letters, 46.



Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2006).

Physical Geodesy.

Springer.



IAG (2015).

Definition and realization of an international height reference system (ihrs) and establishment of a global absolute gravity reference system.



Ihde, J., Sánchez, L., Barzaghi, R., et al. (2017).

Definition and proposed realization of the international height reference system (ihrs).

Surv Geophys, 38:549–570.



Instituto Geográfico Agustín Codazzi (2004).

Parámetros oficiales de transformación para migrar a MAGNA–SIRGAS la información existente en Datum Bogotá.

Technical report, Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá, Colombia.



Klees, R., Seitz, K., and Slobbe, D. C. (2022).

The rtm harmonic correction revisited.

Journal of Geodesy, 96:39.



Klees, R., Slobbe, D. C., and Farahani, H. H. (2018).

A methodology for least-squares local quasi-geoid modelling using a noisy satellite-only gravity field model.
Journal of Geodesy, 92:431–442.



Koch, K.-R. and Kusche, J. (2002).

Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components.
Journal of Geodesy, 76(5):259–268.



Leal, A. and Pérez, S. (2017).

Modelo geoidal para la zona norte de Colombia: Propuesta metodológica.
Technical report, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C.



Lieb, V. (2017).

Enhanced regional gravity field modeling from the combination of real data via mrr.
Veröffentlichungen der DGK, Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Munich.



Lieb, V., Schmidt, M., Dettmering, D., and Börger, K. (2016).

Combination of various observation techniques for regional modeling of the gravity field.
Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 121:3825–3845.



Liu, Q. (2023).

Regional gravity field refinement for geoid height modeling based on the combination of data from various observation techniques.
Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.



Liu, Q., Schmidt, M., Pail, R., and Willberg, M. (2020a).

Determination of the regularization parameter to combine heterogeneous observations in regional gravity field modeling.
Remote Sensing, 12(10):1617.



Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., et al. (2020b).

Regional gravity field refinement for (quasi-) geoid determination based on spherical radial basis functions in Colorado.

J Geod, 94:99.



Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., et al. (2024).

High-resolution regional gravity field modeling in data challenging regions for the realization of geopotential-based height systems.

Earth Planets Space, 76(35).



Mäkinen, J. (2021).

The permanent tide and the international height reference frame ihrf.

Journal of Geodesy, 95(106).



Morelli, C. et al. (1972).

The international gravity standardization net 1971 (i.g.s.n.71).

Technical report, Air Force Cambridge Research Laboratories, European Office of Aerospace Research and Development, Osservatorio Geofisico Sperimentale.

Distributed by NTIS, National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce.



Moritz, H. (1988).

Geodetic reference system 1980: Corrigendum.

Bulletin Géodésique, 62(3):187–192.

Due to errors in the formulas published in the 1992 Geodesists Handbook, readers should refer to this corrigendum.



Naeimi, M., Flury, J., and Brieden, P. (2015).

On the regularization of regional gravity field solutions in spherical radial basis functions.

Geophysical Journal International, 202(2):1041–1053.



Rapp, R. H. (1984).
Geodesia Geométrica Volumen I (Principios Básicos).
Columbus, Ohio 43210.



Reuter, R. (1982).
Über Integralformeln der Einheitssphäre und harmonische Splinesfunktionen.
Phd thesis, RWTH Aachen University.



Rexer, M. (2017).
Spectral Solutions to the Topographic Potential in the context of High-Resolution Global Gravity Field Modelling.
PhD thesis, Technische Universitaet Muenchen.



Rexer, M., Hirt, C., Claessens, S., and Tenzer, R. (2016).
Layer-based modelling of the Earth's gravitational potential up to 10-km scale in spherical harmonics in spherical and ellipsoidal approximation.
Surveys in Geophysics, 37:1035–1074.
Received 29 March 2016; accepted 10 August 2016; published online 29 August 2016.



Rexer, M., Hirt, C., and Pail, R. (2017).
High-resolution global forward modelling – a degree-5480 global ellipsoidal topographic potential model.
In *European Geosciences Union General Assembly 2017*, Vienna, Austria.
Abstract EGU2017-7725; presented on 25/04/2017.



Sánchez, L., Huang, J., Ågren, J., Barzaghi, R., and Vergos, G. S. (2021).

Recovering potential values from regional (quasi-)geoid models.

Technical report, DGFI-TUM, Canadian Geodetic Survey, University of Gävle / Lantmäteriet / Royal Institute of Technology, Politecnico di Milano, Aristotle University of Thessaloniki.

Summary based on: Sánchez L., Ågren J., Huang J., Wang Y. M., Mäkinen J., Pail R., Barzaghi R., Vergos G. S., Ahlgren K., Liu Q. (2021) *Strategy for the realisation of the International Height Reference System (IHR)*, *Journal of Geodesy*, 95(3), <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01481-0>.



Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., et al. (2007).

Regional gravity modeling in terms of spherical base functions.

J Geod, 81:17–38.



Schwabe, J., Mayer-Gürr, T., Hirt, C., and Bauer, T. (2024).

A new spherical harmonic approach to residual terrain modeling: a case study in the central european alps.

Journal of Geodesy, 98:65.



SIRGAS (2021).

Guía para determinación de mediciones gravimétricas alrededor de estaciones ihrf.



Slobbe, C., Klees, R., Farahani, H. H., Huisman, L., Alberts, B., Voet, P., and Doncker, F. D. (2019).

The impact of noise in a grace/goce global gravity model on a local quasi-geoid.

Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 124(3):3219–3237.



Snow, K. (2024).

Adjustment computations: Parts i and ii of notes.

Class notes.

Based on former Geodetic Science Courses GS 650, GS 651, & GS 762 taught at The Ohio State University by Prof. Burkhard Schaffrin.



Späth, F. G. E., Antokoletz, E. D., and Tocho, C. N. (2020).

Tópicos de Gravimetría: Primera Parte.

Editorial de la UNLP, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata.



Sánchez, L. and Sideris, M. G. (2015).

Vertical datum unification for the international height reference system (ihrs).

Geophysical Journal International, 209(2):570–586.



Sánchez, L., Ågren, J., Huang, J., et al. (2021).

Strategy for the realization of the international height reference system (ihrs).

J Geod, 95:33.



Sánchez, L., Čunderlík, R., Dayoub, N., et al. (2016).

A conventional value for the geoid reference potential wo.

J Geod, 90:815–835.



Sánchez, L. R. (2002).

Determinación de alturas físicas en Colombia.

PhD thesis, Technische Universität Dresden, Dresden.



Sánchez, L. R. (2003).

Determinación de la superficie vertical de referencia para Colombia.

PhD thesis, Technische Universität Dresden, Dresden.



Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977).

Solutions of Ill-posed Problems.

Scripta series in mathematics. Winston, Washington; distributed solely by Halsted Press, New York.

Translation of "Metody resheniia nekorrektnykh zadach". Includes bibliography (pp. 236–255) and index.

Torge, W. (2001).

Geodesy.

De Gruyter, Berlin, New York, 3rd edition.

Varga, M., Pitoňák, M., Novák, P., and Bašić, T. (2021).

Contribution of grav-d airborne gravity to improvement of regional gravimetric geoid modelling in colorado, usa.

Journal of Geodesy, 95:53.

Wang, Y. M., Sánchez, L., Ågren, J., et al. (2021).

Colorado geoid computation experiment: overview and summary.

J Geod, 95:127.

Willberg, M., Zingerle, P., and Pail, R. (2020).

Integration of airborne gravimetry data filtering into residual least-squares collocation: example from the 1 cm geoid experiment.

Journal of Geodesy, 94(75).

Wittwer, T. (2015).

Regional gravity field modelling with radial basis functions, volume 72 of *Publications on Geodesy*.

NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Netherlands Geodetic Commission, Delft, the Netherlands.

Xu, J., Schreier, F., Doicu, A., and Trautmann, T. (2016).

Assessment of tikhonov-type regularization methods for solving atmospheric inverse problems.






Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 184:274–286.

Yu, H., Chang, G., Yu, Y., and Zhang, S. (2020).

A direct approach for local quasi-geoid modeling based on spherical radial basis functions using a noisy satellite-only global gravity field model.

Remote Sensing, 12:4045.

Technical Note.

- 
- Yu, H., Chang, G., Yu, Y., and Zhang, S. (2024).
A direct approach for local quasi-geoid modeling based on spherical radial basis functions using a noisy satellite-only global gravity field model.
Remote Sensing, 16(10):1731.
Academic Editors: Vassilios N. Grigoriadis and Vassilios D. Andritsanos.
- 
- Zingerle, P. (2022).
Advanced methodologies for large-scale gravity field modelling, volume Heft Nr. 888 of *DGK: C (Dissertationen)*.
München.
- 
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., and Oikonomidou, X. (2020a).
The combined global gravity field model xgm2019e.
Journal of Geodesy, 94:66.
- 
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., and Oikonomidou, X. (2020b).
The combined global gravity field model xgm2019e.
Journal of Geodesy, 94(66).
Published online: 20 July 2020.
- 
- Zingerle, P., Pail, R., Scheinert, M., and Schaller, T. (2019).
Evaluation of terrestrial and airborne gravity data over antarctica—a generic approach.
Journal of Geodetic Science.
Received 2019-01-25; accepted 2019-04-30.



¡Gracias!

9 de abril de 2026